

migliorare il proprio obiettivo il sistema ha raggiunto l'equilibrio.

Per introdurre la nozione di **equilibrio di Nash** consideriamo due giocatori. Siano $f_A(x, y) : A \times B \Rightarrow \mathfrak{R}$ e $f_B(x, y) : A \times B \Rightarrow \mathfrak{R}$ entrambe da minimizzare. Indichiamo con A lo spazio di ricerca per il primo giocatore e B lo spazio di ricerca per il secondo giocatore. Una strategia $(x_*, y_*) \in A \times B$ rappresenta un punto di equilibrio di Nash se e solo se:

$$\begin{aligned} f_A(x_*, y_*) &= \inf_{x \in A} f_A(x, y_*) \\ f_B(x_*, y_*) &= \inf_{y \in B} f_B(x_*, y) \end{aligned} \quad (1)$$

dove f_A rappresenta il guadagno per il primo giocatore e f_B per il secondo.

Un'algoritmo che ricerca il punto di equilibrio di Nash può risultare dall'accoppiamento del gioco di Nash con un metodo di ricerca dell'ottimo mono obiettivo (vedi fig.1).

Indichiamo con $s = XY$ la stringa che rappresenta la potenziale soluzione di un'ottimizzazione con due obiettivi, dove X è associato al primo obiettivo e Y al secondo. Il compito di ottimizzare il primo obiettivo viene assegnato al giocatore 1, il compito di ottimizzare il secondo obiettivo al giocatore 2. Secondo la teoria di Nash, il giocatore 1 ottimizza s rispetto al primo obiettivo modificando X, mentre Y è fissato dal giocatore 2. Simmetricamente il giocatore 2 ottimizza s rispetto al secondo obiettivo modificando Y, mentre X è fissato dal giocatore 1.

Siano X_{k-1} e Y_{k-1} rispettivamente la miglior strategia trovata dal giocatore 1 e la miglior strategia trovata dal giocatore 2 con la k-1esima ottimizzazione. Alla k-esima ottimizzazione il giocatore 1 ottimizza X_k usando Y_{k-1} per valutare s, cioè in questo caso è $s = X_k Y_{k-1}$, e contemporaneamente il giocatore 2 ottimizza Y_k usando X_{k-1} ($s = X_{k-1} Y_k$). Dopo il processo di ottimizzazione il giocatore 1 manderà la miglior configurazione X_k al giocatore 2 che lo userà per l'ottimizzazione k+1esima e similmente il giocatore 2 manderà il miglior valore Y_k al giocatore 1.

L'equilibrio di Nash è raggiunto quando entrambi i giocatori non possono ulteriormente migliorare il proprio obiettivo.

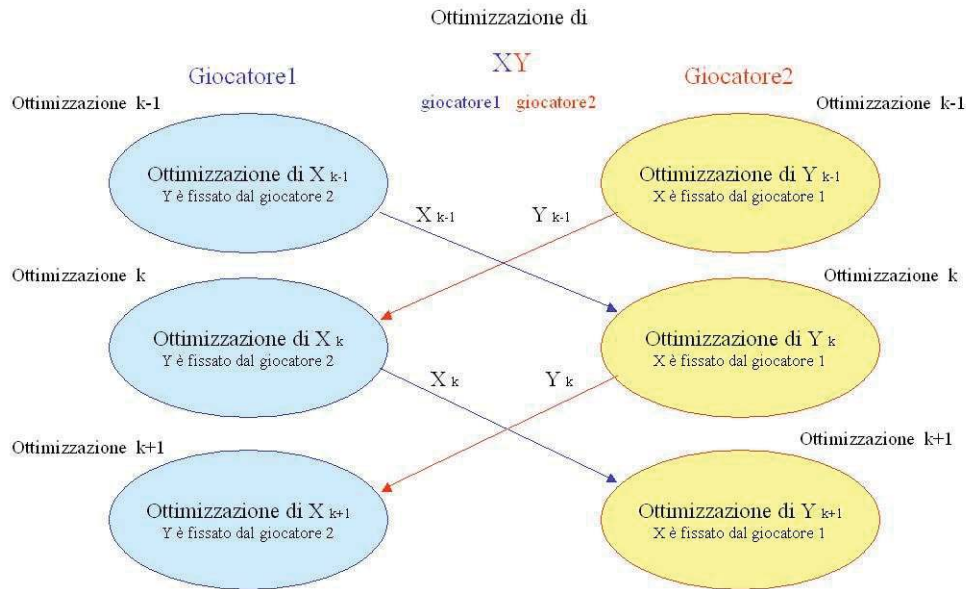


Figura 1: Diagramma di flusso dell'algoritmo Nash/Metodo di ottimizzazione mono obiettivo con due giocatori.

0.3 Teoria di Stackelberg

L'equilibrio di Stackelberg è la soluzione di un gioco gerarchico competitivo. Esso ha una struttura non simmetrica con ruoli completamente diversi dei giocatori.

Si consideri ad esempio il caso di un'ottimizzazione con due obiettivi. Ogni giocatore ha l'incarico di un obiettivo e sceglie la migliore decisione nel proprio spazio di ricerca. Nel gioco di Nash i due giocatori scelgono la migliore

strategia in accordo con quella decisa dall'altro giocatore, in modo da aumentare il proprio guadagno, quindi i giocatori hanno ruoli simmetrici. Nel gioco di Stackelberg invece i ruoli dei giocatori sono definiti gerarchicamente: un giocatore è il *leader*, l'altro è il *follower*.

In molti casi tra gli obiettivi da ottimizzare si ha un legame di tipo *leader/follower*. Nella progettazione di un aereo, ad esempio, l'ideazione del sistema di propulsione precede generalmente quella degli altri componenti. Se gli altri progettisti lavorassero in maniera indipendente, senza tener conto di tale progetto, potrebbero ottenere delle soluzioni che renderebbero il progetto del sistema propulsivo inutile, o comunque non abbastanza efficace, con notevole spreco di tempo. Tuttavia un semplice approccio sequenziale potrebbe risultare non adatto perchè la scelta sulle variabili che influenzano più aspetti del progetto verrebbe fatta da una sola delle diverse parti coinvolte, basandosi su un'informazione incompleta. Inoltre per i *team* sottoposti potrebbe essere impossibile trovare una soluzione progettuale fattibile dati i parametri di progetto imposti dal *leader*.

In tal caso è opportuno servirsi della teoria di Stackelberg. Il gioco di Stackelberg è un gioco gerarchico competitivo simile all'approccio sequenziale, ma è basato sul concetto di **RRS** (*Rational Reaction Set*) che va a rafforzare il legame tra *leader* e *follower*.

Il termine RRS, proveniente dalla teoria dei giochi, in genere indica l'insieme delle soluzioni ottenute da un giocatore isolato che fa delle ipotesi sul comportamento degli altri giocatori. Nella teoria *leader/follower* il *leader* conosce il RRS del *follower* ovvero il *leader* sa come il *follower* regirà alle sue decisioni. L'idea è che se il leader può prevedere in una certa misura la reazione del follower e tener conto nella propria soluzione degli interessi del follower l'intera progettazione sarà più efficace e verranno eliminate le iterazioni non necessarie.

Per introdurre la nozione di **equilibrio di Stackelberg** consideriamo due giocatori. Siano $f_A(x, y) : AxB \implies \Re$ e $f_B(x, y) : AxB \implies \Re$ entrambe da minimizzare. Con A indichiamo lo spazio di ricerca del primo giocatore, il *leader*, e con B lo spazio di ricerca del secondo giocatore, il *follower*. Diremo che la strategia $(x_*, y_*) \in AxB$ rappresenta un punto di equilibrio di Stackelberg

se e solo se:

$$f_A(x_*, y_*) = \inf_{x \in A} f_A(x, \bar{y}_*) \quad (2)$$

dove f_A rappresenta il guadagno per il primo giocatore e \bar{y}_* è la soluzione del seguente problema di minimizzazione rispetto alla variabile decisionale y :

$$f_A(\bar{x}, y) = \inf_{y \in B} f_B(\bar{x}, y) \quad (3)$$

Nell'eq. 3 f_B rappresenta il guadagno per il secondo giocatore e \bar{x} è la variabile di progetto *congelata* ricevuta dal *leader*.

Un'algoritmo che ricerca il punto di equilibrio di Stackelberg può risultare dall'accoppiamento del gioco di Stackelberg con un metodo di ricerca dell'ottimo mono obiettivo (vedi fig.2).

Indichiamo con $s = XY$ la stringa che rappresenta la potenziale soluzione di un'ottimizzazione con due obiettivi, dove X è l'insieme di strategia del *leader* associato al primo obiettivo e Y quello del *follower* associato al secondo obiettivo. Per ogni valore *congelato* X , il *follower* cerca il corrispondente Y che incrementa il suo guadagno. Quando il *leader* riceve tale valore Y , allora procede con un nuovo passo dell'ottimizzazione per accrescere il proprio guadagno.

Questo processo è ripetuto iterativamente finchè il leader non può ulteriormente migliorare il proprio obiettivo. Il punto raggiunto è chiamato equilibrio di Stackelberg.

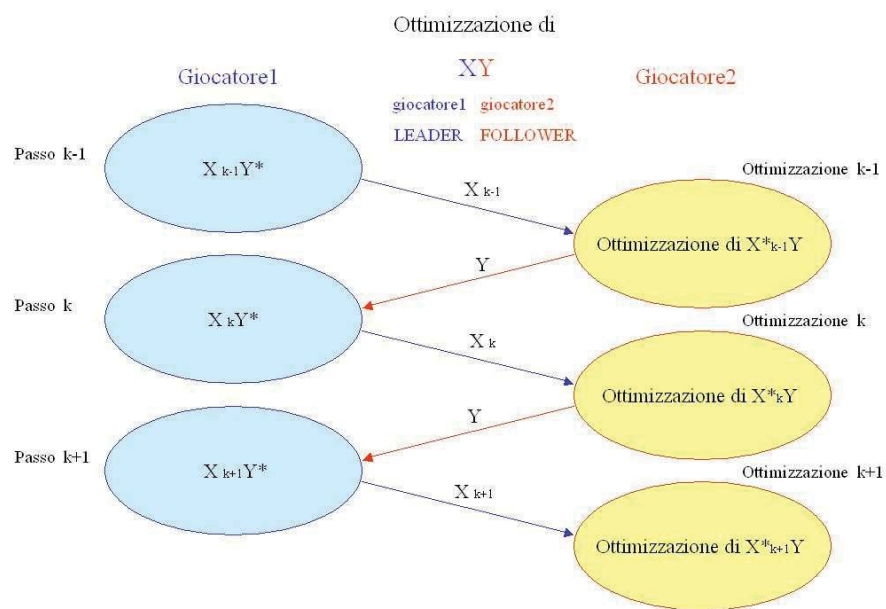


Figura 2: Diagramma di flusso dell'algoritmo Stackelberg/Metodo di ottimizzazione mono obiettivo con due giocatori.

**ALGORITMI DI
OTTIMIZZAZIONE
MONO E MULTI
OBIETTIVO**

In questi ultimi anni si è avuto un crescendo nell'utilizzo di algoritmi di ottimizzazione, in quanto durante il processo di progettazione, sta avendo sempre più importanza la fase di ottimizzazione.

Per questo motivo è stata creata una grande varietà di algoritmi, ognuno con le proprie caratteristiche, e quindi adatti a tipologie di ottimizzazione diverse tra loro.

In questa sezione verranno mostrati alcuni algoritmi, facendo riferimento soprattutto alle differenze tra loro e tra i loro campi di applicazione più caratteristici.

Per riuscire a comprendere meglio le differenze tra i vari algoritmi è utile dare due definizioni che vengono usualmente usate per classificare gli algoritmi:

- robustezza;**
- accuratezza.**